Perché aspettare dieci minuti per misurare la febbre?◊

Silvia Defrancesco°, Luigi Gratton*

Introduzione In questo lavoro si trae lo spunto da una situazione della vita di ogni giorno per discutere alcune interessanti questioni relative alle caratteristiche degli strumenti di misura ed alla termodinamica. Per misurare la nostra temperatura corporea, quando siamo ammalati, dobbiamo tenere il termometro ben stretto per un certo intervallo di tempo. Questo è quanto si trova scritto nelle istruzioni allegate alla confezione.

Poiché pensiamo di inserire l'argomento in un percorso di termodinamica (studenti di una quarta superiore), ci accontentiamo di studiare solo il caso di termometri a mercurio, ancora oggi molto utilizzati perché estremamente affidabili. La proposta ci pare interessante anche perché permette di fare dei significativi collegamenti con le questioni trattate nei programmi di matematica che, in genere, vengono affrontati in maniera astratta e scollegata dalla realtà quotidiana.

Il problema Domande che possiamo porre ai nostri studenti sono del tipo: perché, nel caso della misura della temperatura, dobbiamo attendere del tempo per avere un valore significativo? Come si può stabilire quanto bisogna attendere per essere ragionevolmente certi che il valore misurato sia proprio quello della febbre che abbiamo, naturalmente entro l'incertezza di misura?

Quando spieghiamo agli studenti quali sono le caratteristiche principali degli strumenti di misura, citiamo senza dubbio la "risoluzione"[1], alla quale è legata la "precisione" con cui esprimeremo il risultato della misura, e la "costante di tempo" alla quale è legato l'intervallo di tempo che si deve attendere perché lo strumento di misura fornisca un valore "attendibile" della grandezza che si sta misurando.

Queste due caratteristiche non sono legate tra loro, ma quanto è necessario attendere dipende proprio da esse. L'intervallo di tempo che si deve attendere lo chiameremo d'ora in avanti "prontezza" [1]. Quest'ultimo ha poca rilevanza per molti degli strumenti che facciamo utilizzare agli studenti (il righello o il calibro per esempio), perché nell'utilizzo di questi strumenti la risposta strumentale é "quasi istantanea", il tempo per ottenere la risposta dipende piuttosto dall'utilizzatore che impiega "tutto" il tempo che ritiene necessario per essere accurato. Nel caso dei termometri, tuttavia, la prontezza è di rilevanza fondamentale per poter fare una misura accurata o attendibile.

Nelle esperienze descritte in seguito, utilizzeremo dei termometri con 1°C e 0,1°C di risoluzione. Da notare che il termometro che si utilizza per misurare la febbre differisce, a parità di risoluzione, da quelli utilizzati in laboratorio per due particolari: l'intervallo di misura, in genere compreso tra 34°C e 43°C, e l'avere una "strozzatura" nel capillare che impedisce al mercurio di scendere quando la temperatura ambiente diminuisce. Forse conviene sottolineare che a causa della strozzatura la colonnina di mercurio si muove "a scatti".

◊ Adattamento di un articolo tratto da: La Fisica nella Scuola, XL, 1, 2007

° Liceo Scientifico "G. Galilei", Trento e Museo tridentino di scienze naturali

* Dipartimento di Fisica, Università di Trento

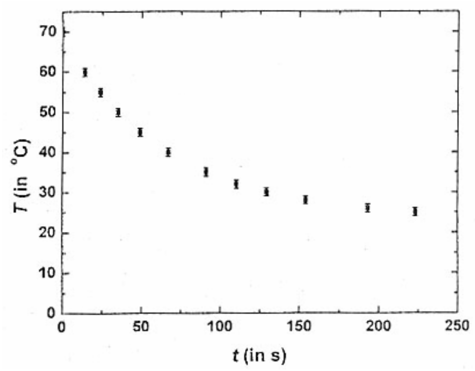
[1] La risoluzione è una caratteristica che fornisce il costruttore dello strumento il quale garantisce, attraverso il suo valore, la più piccola parte della grandezza che lo strumento è in grado di misurare. La risoluzione non va confusa con la sensibilità; quest'ultima è legata alla minima variazione della grandezza in misura che produce deviazione dell'indice dello strumento (eventualmente del *digit* finale per gli strumenti digitali). Per essere chiari, un indice può muoversi tra due "tacche" della scala ma tale movimento non ci permette di attribuire un diverso valore alla misura. Il costruttore garantisce infatti solo la risoluzione che corrisponde alla minima divisione della scala (per gli strumenti digitali la situazione è più complessa). La sensibilità è sempre minore (nel senso di valore assoluto della grandezza) o uguale alla risoluzione. Talora la risoluzione può coincidere con la sensibilità, infine, in certi casi, si può aumentare la risoluzione con un'opportuna operazione di calibrazione (con "aumentare" si intende ovviamente l'essere in grado di misurare un valore più piccolo della grandezza).

Lo studio del funzionamento di un termometro può permettere di comprendere meglio il significato della prontezza e di come esso sia connesso non solo alla risoluzione ed alla costante di tempo, ma anche come sia connesso alle modalità di misura[2].
Proviamo ora a discutere come rispondere alle due domande che abbiamo posto.
É evidente che bisogna fare delle misure. In un primo momento prendiamo in considerazione un termometro ordinario da laboratorio con intervallo -10÷110°C e risoluzione 1°C. Lo scaldiamo a secco, per esempio utilizzando un fornetto, fino alla temperatura di 60°C - 70°C (per non farlo esplodere). Suggeriamo quindi di immergerlo in acqua fresca osservando attentamente come si comporta la colonnina di mercurio. Ripetiamo poi l'esperimento questa volta lasciando raffreddare il termometro in aria senza agitarlo (e cercando di tenerlo il più lontano possibile dal "respiro") nell'intento di misurare la temperatura ambiente. In Tabella 1 sono riportati i dati relativi ad una tipica misura di raffreddamento in aria di un termometro, mentre in Figura 1 è disegnato il relativo grafico.

Tabella 1. Dati relativi al grafico di Figura 1.

$t \pm \Delta t$ (in s)	$T \pm \Delta T$ (in °C)
0± 1	70 ± 1
14 ± 1	60 ± 1
24 ± 1	55 ± 1
35 ± 1	50 ± 1
49 ± 1	45 ± 1
67 ± 1	40 ± 1
91 ± 1	35 ± 1
110 ± 1	32 ± 1
129 ± 1	30 ± 1
154 ± 1	28 ± 1
193 ± 1	26 ± 1
223 ± 1	25 ± 1

Figura 1. Andamento tipico di una misura sperimentale del raffreddamento in aria di un termometro.



Forse gli studenti avranno difficoltà a fornire un valore per la temperatura che vorrebbero misurare solo analizzando il grafico: come risolvere il problema in modo non ambiguo? É utile far anche notare che nel caso del bulbo del termometro immerso in acqua (grafico non riportato) il problema non sembra esistere! Infatti, la temperatura decresce troppo rapidamente per essere misurabile con un cronometro.

Una prima dall'esperimento alla legge

Possiamo supporre che lo scambio di energia tra termometro e ambiente dipenda in qualche maniera dalla differenza di temperatura e c'è da attendersi, come peraltro risulta evidente dall' andamento del grafico di Figura 1, che la velocità di raffreddamento del termometro deve diminuire all'avvicinarsi della temperatura del bulbo a quella dell'ambiente; quando la temperatura del bulbo eguaglia la temperatura ambiente, il raffreddamento finisce.
Possiamo proporre agli studenti un interessante approccio preliminare. L'andamento del grafico suggerisce che il valore di temperatura indicato dal termometro si avvicini asintoticamente ad un valore limite (quello ambiente ovviamente). Supponiamo di conoscere questo valore e rifacciamo un grafico (Figura 2) nel quale tracciamo due linee orizzontali corrispondenti alla temperatura iniziale, T_i, e alla supposta temperatura ambiente T_a, (quella a cui sembra tendere il valore indicato dal termometro). Tracciamo inoltre delle altre linee orizzontali ai valori corrispondenti alla metà della differenza tra T_i e T_a (linea **a** in figura) alla metà della metà di tale differenza (linea **b**), alla metà della metà della metà, 1/8 per intenderci (linea **c**), e si potrebbe proseguire. Interpoliamo con dei segmenti di retta i punti sperimentali e infine

[2] Anche la costante di tempo dipende dalle modalità di misura, in particolare dal modo con cui lo strumento viene "accoppiato" all'oggetto in misura, ma non dipende in modo diretto dalla risoluzione. Quest'ultima affermazione è dovuta al fatto che per costruire degli strumenti ad elevata risoluzione in genere si aumenta la costante di tempo; nel caso dei termometri i bulbi del liquido termometrico sono più grandi per quelli ad alta risoluzione rispetto a quelli a bassa risoluzione.

tracciamo dei segmenti verticali in corrispondenza delle intersezioni di queste rette con i segmenti interpolanti. L'analisi delle intersezioni di questi ultimi con l'asse delle ascisse ci permette di fare delle importanti osservazioni. L'intersezione indicata con $t_{1/2}$ corrisponde al tempo necessario perché la differenza tra la temperatura iniziale e la temperatura attesa (T_a) si riduca alla metà e così via per le altre intersezioni.
Si può notare che, con buona approssimazione (tutto dipende da quanto sono "buone" le misure e da quanto "bene" viene stimata T_a), gli intervalli tra le intersezioni sono tutti uguali e uguali a $t_{1/2}$ che prende il nome di **tempo di dimezzamento**.

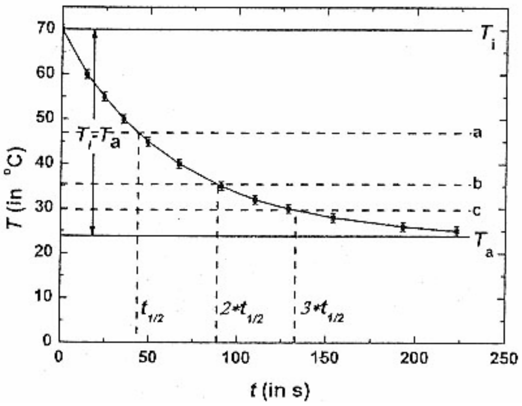


Figura2. Grafico del tempo di dimezzamento

Le funzioni matematiche che godono della caratteristica osservata in Figura 2 sono le funzioni esponenziali del tipo $y = ca^{kz}$ (con c costante e k che può assumere valori positivi, funzioni crescenti, o negativi, funzioni decrescenti). Proviamo dunque a scrivere esplicitamente la funzione. Per farlo dobbiamo tuttavia tenere conto che l'asintoto orizzontale non è l'asse delle ascisse ma la retta $T = T_a$:

$$T - T_a = (T_i - T_a)x^{\frac{t}{t_{1/2}}} \qquad (1)$$

La (1) è la funzione che bene descrive l'andamento dei dati. Infatti per $t = t_{1/2}$ la differenza tra la temperatura misurata e la temperatura prevista si riduce a 1/2 della differenza tra la temperatura iniziale e la temperatura prevista; tale differenza si riduce a 1/4 dopo un tempo pari a 2 x $t_{1/2}$ e così via.
Siamo ora in grado di rispondere correttamente al problema che avevamo inizialmente posto su quanto tempo bisogna attendere.
Se la risoluzione del termometro utilizzato vale ΔT = 1°C dobbiamo attendere almeno fino a quando la differenza tra la temperatura misurata e quella attesa è minore di ΔT:

$$T - T_a < \Delta T \quad . \qquad (2)$$

Sostituendo otteniamo:

$$\Delta T > (T_i - T_a)x2^{\frac{t}{t_{1/2}}} \quad . \qquad (3)$$

Infine risolvendo la disequazione esponenziale (3) rispetto al tempo t otteniamo quanto si deve attendere con il tempo di dimezzamento come unità di misura temporale.

$$t > t_{1/2}x\log\frac{|T_i - T_a|}{\Delta T} \quad . \qquad (4)$$

Conviene notare la necessità di utilizzare il modulo della differenza tra la temperatura iniziale e quella attesa dovuta al fatto che, se la temperatura salisse invece di diminuire come nel caso considerato, l'espressione perderebbe di significato.
Passando ai logaritmi in base 10 la (4) diviene:

$$t > t_{1/2}x\frac{\log\frac{|T_i - T_a|}{\Delta T}}{\log 2} \quad . \qquad (5)$$

Ricordando che T_i vale 70°C e che una stima di T_a può ragionevolmente essere di 24°C si ottiene arrotondando:

$$t > t_{1/2} x 5,5 \quad (6)$$

Per ottenere una misura attendibile bisogna aspettare un tempo pari ad almeno 5,5 volte il tempo di dimezzamento. Tale valore è relativo alle condizioni sperimentali in cui è stata effettuata la misura. Da misure effettuate sul grafico di Figura 2, si ricava che $t_{1/2}$ vale circa 44 s, pertanto bisogna attendere non meno di 240 s (circa 6 minuti!). Per essere veramente certi della attendibilità della misura conviene essere prudenti ed attendere un po' più a lungo.
Va sottolineato che tutto il discorso è basato su una stima della temperatura ambiente che in realtà è incognita e che in ogni caso si suppone sia costante per tutto il tempo della misura. Se si prendesse come valore atteso l'ultimo valore misurato si otterrebbe un $t_{1/2}$ più breve; questo giustifica l'affermazione precedente che sia necessario attendere un tempo ben maggiore di quello calcolato. In ogni caso, la non conoscenza della temperatura ambiente non modifica il risultato, poiché rientra nell'incertezza della misura.

Una analisi più dettagliata: dalla teoria all'esperimento

Quanto analizzato nel precedente paragrafo non è completamente soddisfacente non solo per quanto detto prima, ma anche perché non fornisce informazioni sull'origine della costante $t_{1/2}$; con questo si intende come sia connessa con le caratteristiche del termometro e le modalità della misura.
Che dipenda dalle modalità di misura lo si può far osservare con l'esperimento (non analizzato qui) del raffreddamento del termometro in acqua; la dipendenza dalle caratteristiche del termometro potrebbe essere evidenziata utilizzando termometri differenti, ad esempio aventi il bulbo molto più grande.
Richiamiamo l'attenzione degli studenti sul fatto che nelle due situazioni (raffreddamento in aria e in acqua) c'è una diminuzione della temperatura indicata dal termometro a causa di uno scambio di energia con l'ambiente circostante. La temperatura indicata cessa di variare quando il termometro e l'ambiente circostante sono all'equilibrio termico. II fatto che la prontezza dipenda dall'accoppiamento strumento-ambiente è assolutamente generale e dunque vale anche per tutti i tipi di termometro (termistori, lamine bimetalliche, termometri a gas...). Pertanto, per affrontare il problema che ci si è posti, bisogna analizzare le modalità con cui due sistemi fisici (termometro e ambiente) possono scambiare energia.
Due sistemi a temperatura differente possono scambiare energia per mezzo della conduzione, della convezione e dell'irraggiamento. II primo termine avviene attraverso il contatto diretto dei due sistemi e, in prima approssimazione, può essere considerato proporzionale alla differenza di temperatura. La costante di proporzionalità è un coefficiente che tiene conto di quanto bene o male i due sistemi scambino energia per conduzione. Bisogna sottolineare che perché la conduzione sia efficace è necessario che il bulbo del termometro (la parte sensibile), deve essere "completamente immerso" nel secondo sistema. Non si può, per esempio, pensare di misurare la temperatura di una superficie piana (un tavolo) con un termometro il cui bulbo, che può essere assimilato localmente a una sfera, tocca la superficie solo in un punto! Negli esperimenti proposti il bulbo è effettivamente "immerso" nel secondo sistema (fa un buon contatto termico)? La conduzione non è particolarmente efficiente nel caso dell'aria e dell'acqua, non si tratta di buoni conduttori termici.
L'aria e l'acqua sono, tuttavia, dei fluidi e nei fluidi esiste un secondo meccanismo responsabile dello scambio termico: la convezione (all'interno del fluido ovviamente). Se c'è convezione il meccanismo di scambio è molto più efficiente ed è il motivo per cui si utilizzano nell'industria i forni a convezione e in cucina i forni ventilati. Esistono due tipi di convezione, quello naturale e quello forzato. Il primo è dovuto in ultima analisi alla forza di gravità: le correnti convettive sono dovute alla differente densità di un fluido caldo rispetto ad uno freddo. In una navicella spaziale (moto in caduta libera) questo tipo di convezione non esiste: un oggetto caldo si raffredda solo per conduzione! Che la convezione forzata sia molto efficace gli studenti lo sanno certamente: non soffiano forse sopra un cucchiaio di minestra

bollente per non scottarsi? In quest'ultimo caso si facilita anche l'evaporazione. Questo è il motivo per cui, nel presente esperimento, si deve raccomandare agli studenti di non respirare sul bulbo mentre si effettua la misura. Il termine dovuto alla convezione nella teoria che segue lo considereremo trascurabile; in ogni caso sarà il confronto tra la teoria e la misura che ci mostrerà se sia corretto questo modo di procedere.

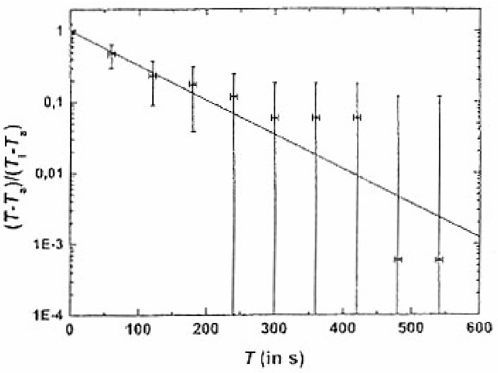


Figura 6. Best fit per il calcolo della costante di tempo del termometro da febbre. Per le barre di errore vedi nota 6.

Rimane da analizzare il contributo dell'irraggiamento. Mentre agli studenti è noto che il Sole ci riscalda, perché l'energia che produce viaggia nello spazio vuoto, raggiunge la Terra e, in qualche modo viene assorbita, agli stessi è meno noto che per tutti i corpi esiste lo stesso meccanismo di scambio di energia; la quantità di energia che "emettono" dipende dalla temperatura assoluta. Bisogna parlare di scambio di energia perché se è vero che il Sole ci irraggia, è anche vero che la Terra "irraggia" il Sole, ma l'energia che la Terra invia al Sole è molto poca rispetto a quella che il Sole invia verso di noi perché la temperatura (assoluta) superficiale media della Terra è di gran lunga inferiore a quella superficiale del Sole. Proviamo a discutere con gli studenti in che occasioni "sperimentiamo" l'irraggiamento. Per esempio quando ci si scalda davanti a un fuoco, o si prende il Sole, si sente "caldo" solo dalla parte che sta di fronte alla sorgente che emette energia per irraggiamento. La problematica dell'irraggiamento non è stata ancora affrontata in maniera formale dagli studenti di una quarta superiore, tuttavia ci pare utile menzionare che la quantità di energia scambiata nell'unità di tempo da un corpo con l'ambiente circostante è descritta da una relazione (quella di Stefan-Boltzmann) che contiene alcuni parametri caratteristici del corpo (la sua superficie, un coefficiente di emissività), la costante universale di Stefan-Boltzmann e la differenza tra le quarte potenze della temperatura del corpo e dell'ambiente circostante. Anche per l'irraggiamento il valore dell'energia scambiata nell'unità di tempo è nullo all'equilibrio termico. Nel seguito anche questo termine verrà trascurato in quanto molto piccolo rispetto al termine di conduzione: questo a causa della costante di Boltzmann che è estremamente piccola.

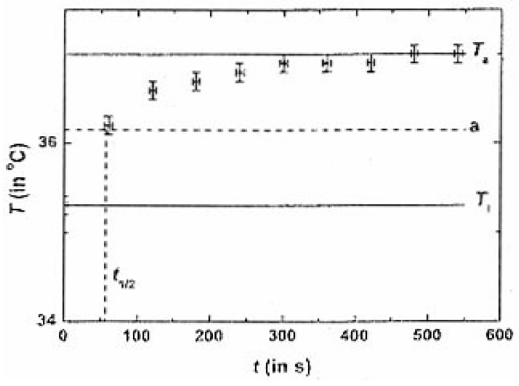
Misuriamo la febbre

Raccogliere dati con un termometro da febbre è una operazione non facile perché quando si inserisce lo strumento sotto l'ascella non si riesce a vedere bene la scala. Tuttavia, grazie ad uno studente "cavia" abbiamo raccolto la serie di dati riportati in Tabella 2, grazie ai quali abbiamo ricavato il grafico riportato in Figura 5.

Tabella 2. Misura della “febbre”.

$t \pm \Delta t$ (in s)	$T \pm \Delta T$ (in °C)
0± 5	35,3 ± 0,1
60 ± 5	36,2 ± 0,1
120 ± 5	36,6 ± 0,1
180 ± 5	36,7 ± 0,1
240 ± 5	36,8 ± 0,1
300 ± 5	36,9 ± 0,1
360 ± 5	36,9 ± 0,1
420 ± 5	36,9 ± 0,1
480 ± 5	37,0 ±0,1
540 ± 5	37,0 ± 0,1

Figura 5. Grafico dei dati di Tabella 2 e tempo di dimezzamento. La linea tratteggiata a corrisponde al valore medio tra T_i, e T_a.



L'intervallo di misura molto piccolo è dovuto al fatto che la "cavia" non aveva la febbre, ma l'andamento è simile a quello analizzato precedentemente con la sola differenza che questa volta si ha una crescita della temperatura verso un valore limite. Anche in questo caso si può procedere alla valutazione per via grafica del tempo di dimezzamento: una stima porta a un valore attorno ai 60s. Utilizzando la (14) si ottiene per τ un valore di 86S. Procediamo comunque riportando i valori elaborati in una scala semilogaritmica. Si ottiene il grafico di Figura 6.
La retta di best fit è stata ottenuta imponendo il passaggio per il primo punto, ciò perché si ritiene che il primo dato sia quello noto con la maggiore precisione. Nel best fit è evidente che "pesano" di più i primi dati, che corrispondono a maggiori variazioni di temperatura ed inoltre sono meno influenzati da una cattiva conoscenza della temperatura ambiente. Il best fit consente di attribuire alla costante di tempo il valore di (90±10)s, compatibile con quello stimato a partire dal tempo di dimezzamento.
Per concludere, utilizzando la (13) si ricava che, per avere una misura attendibile della temperatura corporea, bisogna attendere almeno (240±30)s, cioè più di quattro minuti. Tenuto conto che in genere la temperatura da misurare è più elevata, è ragionevole che sulle istruzioni del termometro sia suggerito di tenere il termometro a contatto col corpo per un tempo tra i 5 e i 10 minuti

Conclusioni

Ci sembra che proporre in classe un esperimento sulla costante di tempo di un termometro possa essere particolarmente utile per i seguenti motivi:

- permette di ragionare sulla prontezza di uno strumento, in particolare di un termometro a mercurio;
- permette di applicare tecniche matematiche alla fisica;
- fa "vedere" l'applicazione pratica di alcuni concetti di matematica la cui utilità spesso sfugge agli studenti che in genere si esercitano sugli stessi solo con applicazioni lontane dalla realtà quotidiana;
- fornisce un'occasione in più per parlare dei meccanismi di scambio di energia tra i sistemi fisici in una situazione reale;
- fornisce uno dei tanti esempi di una legge esponenziale presenti in fisica;
- permette di affrontare in modo semplice la distinzione tra costante di tempo e tempo di dimezzamento, che viene in generale introdotto solo quando si parla di radioattività.

Bibliografia

[1] M. CAPORALONI, S. CAPORALONI, R. AMBROSINI, *La misura e la valutazione della sua incertezza nella fisica sperimentale*, Zanichelli 1987.

[2] F. CORNI., L. MAGNAGO, "Riconoscimento grafico elementare di un fenomeno esponenziale: dall'analisi qualitativa a quella quantitativa", *LFnS*, XXXVIII, 3, Supplemento, 38-45 (2005).